

Moment cinétique et solide en rotation

19

Le principe fondamental de la dynamique relie la variation de la quantité de mouvement aux forces appliquées. Pourtant, pour les systèmes en rotation, la notion de force n'est pas toujours la plus pertinente. Dans ce chapitre, on introduit deux nouvelles grandeurs mécaniques : le moment cinétique et le moment d'une force. On relie alors la variation du moment cinétique aux moments des forces appliquées au système.

1 Observations préliminaires

1.1 Exemples introductifs

Lorsque l'on cherche à ouvrir une porte, on applique une force sur la poignée. Le positionnement de la poignée, ainsi que l'orientation de la force appliquée ne sont pas laissés au hasard. Pour être efficace, la force doit être appliquée le plus loin possible des gonds de la porte qui matérialisent son axe de rotation. De plus, elle doit être appliquée perpendiculairement à la porte. Cette configuration permet d'augmenter au maximum le bras de levier de la force, qui est la distance séparant l'axe de rotation de la porte de la droite d'application de la force.

Remarque

La droite droite d'application de la force est la droite passant par le point d'application de la force et parallèle à cette dernière.

On retrouve la notion de bras de levier dans de nombreux objets de la vie courante et notamment dans l'un des plus anciens instruments de pesée, la balance romaine (voir figure 19.1). Cet instrument est constitué de deux fléaux de longueurs différentes et d'un contrepoids mobile de masse donnée. La position de la masse à peser est fixe sur le fléau le plus court, celle du contrepoids est variable. On déplace le contrepoids jusqu'à l'obtention de l'équilibre et sa position, repérée grâce à des graduations gravées sur le fléau le plus long, permet de mesurer la masse à peser. La figure 19.1 illustre le fait que l'augmentation du bras de levier permet d'équilibrer une masse de 5 kg ou de 10 kg à l'aide d'un contrepoids identique de 1 kg.

1.2 Notion intuitive de bras de levier

Les exemples précédents montrent que la notion de force n'est pas suffisante pour étudier les systèmes en rotation autour d'un axe. Le bras de levier est également déterminant. De fait, la notion pertinente pour étudier ce type de problèmes est le produit « force \times bras de levier ». L'objet de ce chapitre est de mettre en place de nouvelles grandeurs physiques qui permettent d'étudier les systèmes en rotation.

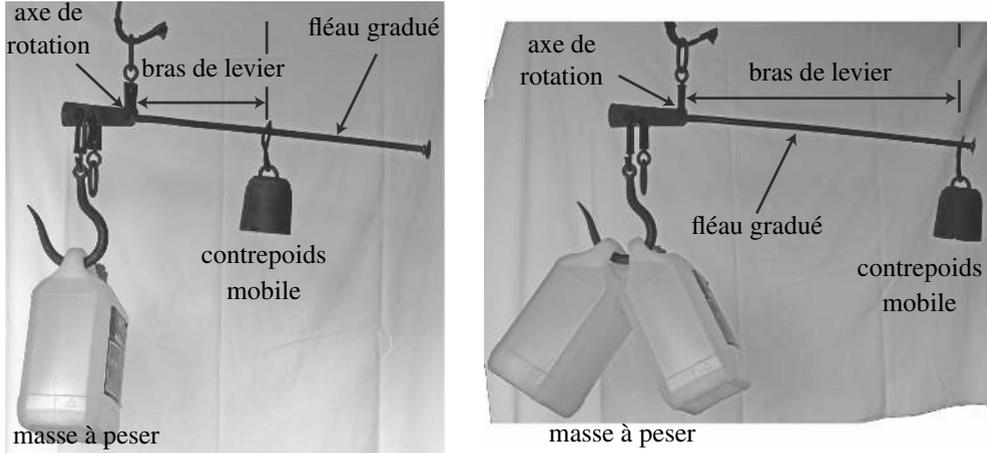


Figure 19.1 – Balance romaine pesant une masse de 5 kg (à gauche) ou 10 kg (à droite).

2 Moment cinétique d'un point matériel

2.1 Définition du moment cinétique

On considère un point matériel M de masse m animé d'une vitesse \vec{v} dans le référentiel \mathcal{R} galiléen. On note $\vec{p} = m\vec{v}$ sa quantité de mouvement. On considère également un axe orienté $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$ déterminé par un point O et un vecteur unitaire \vec{u}_Δ dont le sens précise l'orientation de l'axe.

a) Moment cinétique par rapport à un point O

Le **moment cinétique de M par rapport à un point O** est le vecteur défini par le produit vectoriel :

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p} = m\vec{OM} \wedge \vec{v}.$$

Sa norme se mesure en $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1} = \text{J}\cdot\text{s}$.

Le moment cinétique par rapport à un point O est défini à partir de la vitesse de M , il dépend donc du référentiel dans lequel on le détermine.

Propriétés du moment cinétique par rapport à un point De par sa définition à partir d'un produit vectoriel, \vec{L}_O est perpendiculaire aux vecteurs \vec{OM} et \vec{v} . En conséquence :

- si le mouvement de M est plan et que O appartient au plan du mouvement, le vecteur \vec{L}_O est perpendiculaire à ce plan à tout instant. Sa direction est donc fixe et perpendiculaire au plan du mouvement. La réciproque est vraie.
- si le mouvement de M est rectiligne et inscrit sur une droite \mathcal{D} passant par O , \vec{L}_O est nul à tout instant puisque les vecteurs \vec{OM} et \vec{v} sont colinéaires à tout instant. La réciproque est vraie.

Il faut également noter que le moment cinétique dépend du point par rapport auquel on le calcule et que l'on indique en indice. En effet,

$$\vec{L}_B = \vec{BM} \wedge \vec{p} = (\vec{BA} + \vec{AM}) \wedge \vec{p} = \vec{BA} \wedge \vec{p} + \vec{AM} \wedge \vec{p},$$

que l'on peut écrire :

$$\vec{L}_B = \vec{L}_A + \vec{BA} \wedge \vec{p}. \quad (19.1)$$

b) Moment cinétique par rapport à un axe orienté Δ

Le **moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$** est la projection orthogonale de \vec{L}_O sur l'axe Δ :

$$L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta = m(\vec{OM} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta.$$

Comme le moment cinétique par rapport à un point, le moment cinétique par rapport à un axe dépend du référentiel d'étude et se mesure en J.s. Par contre, il ne dépend pas du choix du point O appartenant à l'axe Δ utilisé pour le calculer mais seulement de la direction et de l'orientation de Δ .

En effet, si l'on considère deux points A et B appartenant à l'axe Δ , le produit scalaire de la relation (19.1) par \vec{u}_Δ donne :

$$\vec{L}_B \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_\Delta + (\vec{BA} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{u}_\Delta.$$

Or A et B appartiennent à Δ donc \vec{AB} est colinéaire à \vec{u}_Δ et $\vec{BA} \wedge \vec{p}$ est perpendiculaire à \vec{u}_Δ . Le terme $(\vec{BA} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{u}_\Delta$ s'annule et finalement :

$$\vec{L}_B \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_\Delta,$$

ce qui prouve que le point de l'axe choisi pour calculer L_Δ n'a pas d'importance.

c) Cas où le point matériel est en mouvement circulaire

Lorsque M est en mouvement circulaire sur un cercle de centre O et de rayon R . On a intérêt à le repérer en coordonnées cylindriques de centre O , d'axe (Oz) perpendiculaire au plan du

cercle, et d'angle polaire θ . On utilise alors les relations établies dans le chapitre *Cinématique du point* :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta.$$

On considère $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ et on calcule \vec{L}_O et $L_\Delta = L_{(Oz)}$:

$$\vec{L}_O = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = m(R\vec{u}_r) \wedge (R\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mR^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

et

$$L_{(Oz)}(M) = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_z = mR^2\dot{\theta}.$$

On peut trouver la direction de \vec{L}_O à l'aide de la « règle de la main droite » représentée sur la figure 19.2. Ainsi :

- lorsque la révolution du point M se fait dans le sens direct autour de \vec{u}_z , $\dot{\theta} > 0$ et \vec{L}_O est selon $+\vec{u}_z$;
- lorsque la révolution du point M se fait dans le sens indirect autour de \vec{u}_z , $\dot{\theta} < 0$ et \vec{L}_O est selon $-\vec{u}_z$.

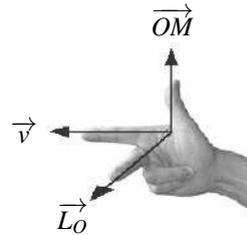


Figure 19.2 – Règle de la main droite.

Le signe de $L_{(Oz)}(M)$ permet donc de déterminer le sens de la révolution circulaire de M :

- si $L_{(Oz)}(M) > 0$, la révolution se fait dans le sens direct dans le plan orienté par \vec{u}_z ;
- si $L_{(Oz)}(M) < 0$, la révolution se fait dans le sens indirect dans le plan orienté par \vec{u}_z .

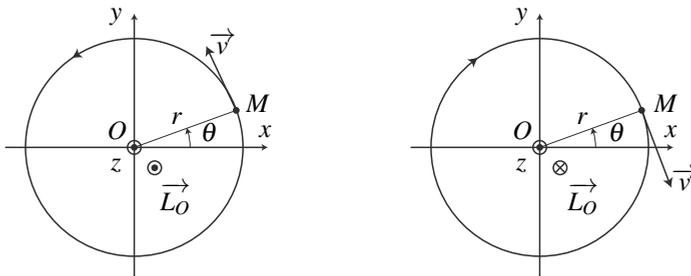


Figure 19.3 – Moment cinétique en O d'un mobile en révolution circulaire de centre O .

Remarque

La définition du moment cinétique en O implique que la trajectoire de M « s'enroule » dans le sens direct autour de la droite orientée (O, \vec{L}_O) .

d) Notion de moment d'inertie

Plus généralement, lorsque l'axe Δ est fixe, on peut le faire coïncider avec l'axe (Oz) et repérer M à l'aide de ses coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$. On peut alors calculer $L_{(Oz)} = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_z$ qui correspond à la composante selon \vec{u}_z du moment cinétique de M par rapport à O :

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= m\vec{OM} \wedge \vec{v} = m(r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z) \\ &= m\left(r^2\dot{\theta}\vec{u}_z + (\dot{r}z - r\dot{z})\vec{u}_\theta - zr\dot{\theta}\vec{u}_r\right),\end{aligned}$$

soit :

$$L_{(Oz)} = mr^2\dot{\theta}.$$

En coordonnées cylindriques d'axe (Oz) , on définit le **moment d'inertie** d'un point M de coordonnées (r, θ, z) par rapport à l'axe (Oz) :

$$J_{(Oz)}(M) = mr^2.$$

Le moment cinétique de M par rapport à (Oz) est alors égal au produit du moment d'inertie $J_{(Oz)}(M)$ par la vitesse angulaire $\dot{\theta}$:

$$L_{(Oz)} = J_{(Oz)}(M)\dot{\theta}. \quad (19.2)$$

3 Moment cinétique d'un solide ou d'un système de points

Dans le chapitre de *Cinématique du solide*, on a décrit deux grands types de mouvements de solides : les mouvements de translation et les mouvements de rotation autour d'un axe fixe. Les mouvements de translation s'étudient à l'aide du principe fondamental de la dynamique. L'étude des mouvements de rotation autour d'un axe fixe utilise le moment cinétique par rapport à l'axe de rotation fixe Δ . C'est pourquoi, dans ce paragraphe, on se restreint au moment cinétique L_Δ d'un solide ou d'un système de points par rapport à un axe orienté Δ .

3.1 Cas d'un système déformable

a) Moment cinétique par rapport à un axe orienté

On considère un système constitué de plusieurs points matériels M_i de masses m_i de moments cinétiques par rapport à l'axe orienté Δ : $L_\Delta(M_i)$. Le moment cinétique du système de points est obtenu par sommation des moments cinétiques de chacun des points :

$$L_\Delta = \sum_i L_\Delta(M_i).$$

Les moments cinétiques par rapport à Δ étant algébriques, il faut être rigoureux sur les signes.

b) Cas des coordonnées cylindriques

Lorsque l'axe Δ est fixe, on utilise généralement les coordonnées cylindriques d'axe (Oz) confondu avec Δ . Le moment cinétique de chaque point M_i est donné par la relation (19.2) : $L_{(Oz)}(M_i) = m_i r_i^2 \dot{\theta} = J_{(Oz)}(M_i) \dot{\theta}_i$ où $J_{(Oz)}(M_i) = m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du point M_i par

rapport à (Oz) et $\dot{\theta}_i$ sa vitesse angulaire :

$$L_{(Oz)} = \sum_i L_{(Oz)}(M_i) = \sum_i J_{(Oz)}(M_i) \dot{\theta}_i. \quad (19.3)$$

Exemple

On considère le cas où deux points M_1 et M_2 de même masse m sont en rotation circulaire et uniforme de centre O et de rayon R dans le plan (Oxy) . Le moment d’inertie de chacun des points vaut alors $J_{(Oz)} = mR^2$. On envisage deux cas :

- le cas où les points M_1 et M_2 ont la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Le moment cinétique par rapport à (Oz) de chacun des points vaut alors $L_{(Oz)}(M_i) = mR^2 \dot{\theta}$. Celui du système vaut donc $L_{(Oz)} = 2mR^2 \dot{\theta}$;
- le cas où ils ont des vitesses angulaires opposées et $L_{(Oz)}(M_1) = -L_{(Oz)}(M_2)$. Le moment cinétique du système par rapport à (Oz) vaut donc $L_{(Oz)} = 0$.

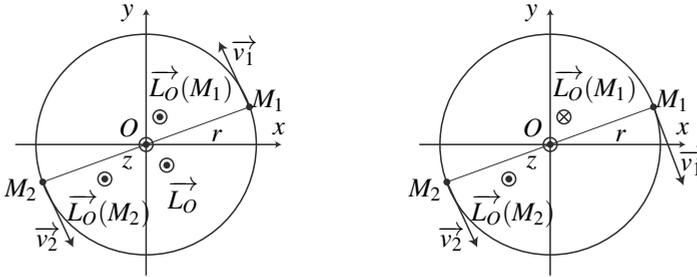


Figure 19.4 – Moment cinétique en O d’un système de deux points en révolution circulaire de centre O .

3.2 Cas d’un solide en rotation par rapport à un axe

On considère un solide en rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour d’un axe orienté fixe dans un référentiel \mathcal{R} . On choisit l’axe (Oz) pour qu’il coïncide avec cet axe de rotation. On modélise le solide par un ensemble de points matériels M_i de masse m_i repérés en coordonnées cylindriques d’axe (Oz) : $M_i(r_i, \theta_i, z_i)$.

a) Moment d’inertie d’un solide

On rappelle une relation essentielle du chapitre de cinématique du solide : **chaque point d’un solide en rotation autour d’un axe fixe possède la même vitesse angulaire**. Le mouvement du solide est alors un cas particulier du mouvement d’un système de points dans lequel la vitesse angulaire de chacun des points du système est la même. On peut donc factoriser l’expression (19.3) par la vitesse angulaire commune $\dot{\theta}$:

$$L_{(Oz)} = \sum_i L_{(Oz)}(M_i) = \left(\sum_i J_{(Oz)}(M_i) \right) \dot{\theta} = J_{(Oz)} \dot{\theta}.$$

Le **moment d'inertie** $J_{(Oz)}$ du solide par rapport à l'axe (Oz) est défini par la somme des moments d'inertie par rapport à (Oz) de chacun des points le constituant :

$$J_{(Oz)} = \sum_i J_{(Oz)}(M_i).$$

Remarque

On peut également modéliser le solide par une répartition continue de masse. La somme discrète précédente devient alors une intégrale sur le volume du solide.

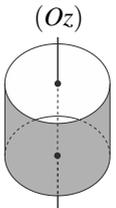
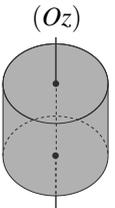
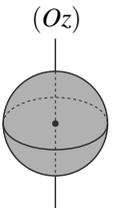
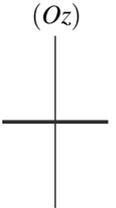
b) Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe orienté (Oz)

Le moment cinétique par rapport à un axe (Oz) d'un solide en rotation autour de (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est égal au produit du moment d'inertie $J_{(Oz)}$ du solide par sa vitesse angulaire :

$$L_{(Oz)} = J_{(Oz)} \dot{\theta}.$$

c) Moments d'inertie de quelques solides homogènes

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe est une caractéristique intrinsèque que l'on peut mesurer. On peut également le calculer dans certains cas simples. Pour information, on donne les moments d'inertie par rapport à l'axe (Oz) dessiné sur les figures suivantes pour des solides homogènes de masse m :

cylindre vide de rayon R	cylindre plein de rayon R	boule de rayon R	barre de longueur L
mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$
			

En pratique, en notant d la distance qui sépare l'axe (Oz) du point du solide qui en est le plus éloigné, le moment d'inertie d'un solide de masse m par rapport à (Oz) vaut $J_{(Oz)} = kmd^2$. Dans cette formule, k est un facteur numérique inférieur à 1 qui ne dépend que de la forme du solide et de la manière dont la masse est répartie à l'intérieur de ce dernier.

Exemple

On peut modéliser la jante d’une roue de voiture par un cylindre creux de masse m et de rayon R . Son moment d’inertie par rapport au moyeu est donc environ égal à mR^2 .

d) Évolution du moment d’inertie en fonction de la répartition des masses (MPSI)

La contribution d’une masse m au moment d’inertie d’un solide par rapport à un axe (Oz) est égale à mr^2 où r est sa distance à l’axe (Oz) .

Plus une masse m est éloignée de l’axe de rotation (Oz) , plus sa contribution au moment d’inertie par rapport à (Oz) est importante.

Ceci explique pourquoi le moment d’inertie d’un cylindre plein est inférieur à celui d’un cylindre creux de même masse : une partie importante de sa masse est située à faible distance de l’axe et contribue peu à son moment d’inertie.

La mesure du moment d’inertie d’un solide permet également d’obtenir des informations sur la répartition interne des masses.

Exemple

Les mesures astronomiques du moment d’inertie de la Terre par rapport à son axe Nord-Sud montrent qu’il vaut $0,33M_T R_T^2$ où M_T et R_T sont la masse et le rayon de la Terre. Il est inférieur à celui d’une boule homogène de même masse et même rayon qui vaut $0,4M_T R_T^2$. On en déduit que la répartition des masses à l’intérieur de la Terre n’est pas homogène et que la couche profonde située près de son axe de rotation est plus dense que les couches superficielles. Cette couche profonde est le noyau. Connaissant sa taille, on peut estimer sa densité. Elle correspond à celle du fer à haute pression. C’est un des principaux arguments prouvant que le noyau est essentiellement composé de fer.

4 Moment d’une force

On considère maintenant une force \vec{f} qui s’applique en un point M .

4.1 Moment d’une force par rapport à un point O

Le moment en O de la force \vec{f} s’appliquant en M est le vecteur défini par le produit vectoriel :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = \vec{OM} \wedge \vec{f}.$$

Sa norme se mesure en joule $J = N \cdot m$.

Le moment des forces par rapport à un point est une grandeur additive : si on considère deux forces \vec{f}_1 et \vec{f}_2 qui s’appliquent sur M :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) = \vec{OM} \wedge (\vec{f}_1 + \vec{f}_2) = \vec{OM} \wedge \vec{f}_1 + \vec{OM} \wedge \vec{f}_2 = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_1) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_2),$$

Le moment de la somme des forces est la somme des moments.

Remarque

Lorsque l'on s'occupe du mouvement d'un point M , la force s'applique forcément en M . Lorsque l'on s'occupe d'un système de points ou d'un solide, le point M est le point d'application de la force.

4.2 Moment d'une force par rapport à un axe orienté Δ **a) Définition**

Le moment de la force \vec{f} par rapport à l'axe orienté $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$ est la projection orthogonale de $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f})$ sur Δ :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta = (\vec{OM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta.$$

Comme le moment d'une force par rapport à un point, c'est une grandeur additive qui se mesure en joule. On peut également montrer que le moment de la force \vec{f} par rapport à l'axe Δ ne dépend pas du point de l'axe choisi pour le calculer mais seulement de \vec{f} et de la direction et de l'orientation de Δ .

b) Calcul en coordonnées cylindriques

Lorsque l'axe Δ est fixe, on peut faire coïncider l'axe (Oz) avec Δ et repérer M par ses coordonnées cylindriques : $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$. On peut alors calculer la composante selon \vec{u}_z du moment $\vec{\mathcal{M}}_O$ qui correspond au moment de \vec{f} par rapport à (Oz) :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) &= (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge (f_r\vec{u}_r + f_\theta\vec{u}_\theta + f_z\vec{u}_z) \\ &= -zf_\theta\vec{u}_r + (zf_r - rf_z)\vec{u}_\theta + rf_\theta\vec{u}_z \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}) = rf_\theta. \quad (19.4)$$

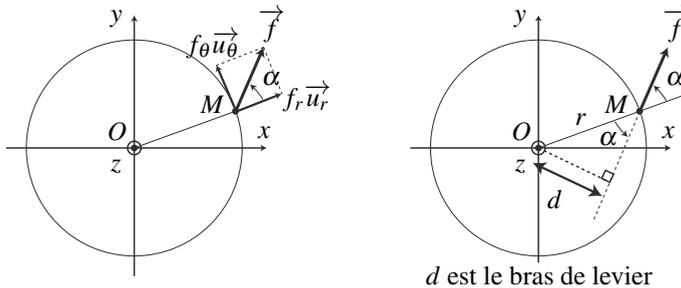


Figure 19.5 – Moment $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f})$ de la force \vec{f} .

Étant donné que ni la composante selon \vec{u}_z du vecteur position ni celle de la force n'interviennent, on représente cette situation sur la figure 19.5 en se restreignant au plan (Oyx) , perpendiculaire à (Oz) . La partie gauche de la figure 19.5 permet de réécrire cette relation $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}) = rf \sin \alpha$ où f est la norme de \vec{f} et α l'angle (\vec{u}_r, \vec{f}) défini sur la figure 19.5. On se reporte alors à la partie droite pour observer que $|r \sin \alpha| = d$ est la distance séparant la droite d'action de la force \vec{f} de l'axe (Oz) . La distance d est appelée le bras de levier de la force \vec{f} et on a :

$$|\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f})| = fd.$$

Le signe de $\mathcal{M}_{(Oz)}$ est :

- positif lorsque $\alpha \in]0, \pi[$. C'est le cas lorsque \vec{f} tend à faire bouger M vers les θ croissants ;
- négatif lorsque $\alpha \in]-\pi, 0[$. C'est le cas lorsque \vec{f} tend à faire bouger M vers les θ décroissants.



On appelle **droite d'action d'une force** \vec{f} appliquée en M est la droite (M, \vec{f}) passant par M et dirigée par le vecteur \vec{f} .

c) Notion de bras de levier

On appelle **bras de levier** la distance séparant l'axe Δ de la droite d'action (M, \vec{f}) de la force \vec{f} . La valeur absolue $|\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f})|$ du moment de \vec{f} par rapport à Δ est égale au produit :

$$|\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f})| = \text{norme de la force} \times \text{bras de levier.}$$

Pour déterminer le signe de $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f})$, on peut au choix :

- rechercher le sens du projeté de $\vec{OM} \wedge \vec{f}$ sur la droite orientée Δ ;
- regarder le sens dans lequel la force \vec{f} tend à faire tourner M autour de Δ :
 - si ce sens est direct, $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}) > 0$;
 - si ce sens est indirect, $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}) < 0$.

Remarque

Dans le cas de la figure 19.5, le moment de \vec{f} par rapport à l'axe (Oz) orienté est positif car la force \vec{f} tend à faire tourner M dans le sens direct autour de (Oz) .

d) Cas où $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f})$ est nul

Le moment d'une force \vec{f} non nulle par rapport à un axe orienté Δ est nul dans deux cas :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = 0 \implies \begin{cases} \vec{f} \parallel \vec{u}_\Delta \\ \text{ou} \\ \text{la droite d'action de } \vec{f} \text{ coupe } \Delta. \end{cases}$$

En effet, dans le premier cas, le moment en O de \vec{f} est perpendiculaire à \vec{f} donc à \vec{u}_Δ et sa projection sur Δ est donc nulle. Dans le deuxième cas, le bras de levier est nul.

Remarque

En coordonnées cylindriques d'axe $(Oz) = \Delta$, l'équation (19.4) permet également de démontrer le premier cas puisque $\vec{f} \parallel \vec{u}_z$ donc $f_\theta = 0$.

5 Loi du moment cinétique pour un point matériel

On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans un référentiel galiléen \mathcal{R} . Le point M est soumis à un ensemble de forces \vec{f}_i . On note O un point fixe et Δ une droite orientée fixe contenant O . On choisit l'axe (Oz) de telle sorte que $\Delta = (Oz)$. À l'instant t , on note \vec{OM} , \vec{v} et $\vec{p} = m\vec{v}$ les vecteurs position, vitesse et quantité de mouvement de M dans \mathcal{R} . On note également \vec{L}_O le moment cinétique de M par rapport à O , $L_{(Oz)}$ son moment cinétique par rapport à $\Delta = (Oz)$, $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i)$ le moment de la force \vec{f}_i par rapport à O et $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$ son moment par rapport à $\Delta = (Oz)$.

5.1 Loi du moment cinétique par rapport à un point fixe

La dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à O est égale à la somme des moments des forces calculés par rapport au même point O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i). \quad (19.5)$$

On démontre cette loi en remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \frac{d\vec{OM} \wedge \vec{p}}{dt} = \vec{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge \vec{p} \\ &= \vec{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}. \end{aligned}$$

En effet, le point O étant fixe, $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v}$ donc $\frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge \vec{p} = \vec{v} \wedge (m\vec{v}) = \vec{0}$. On exprime

alors $\frac{d\vec{p}}{dt}$ à l'aide du principe fondamental de la dynamique : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{f}_i$ pour obtenir :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{OM} \wedge \sum_i \vec{f}_i = \sum_i \vec{OM} \wedge \vec{f}_i = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i).$$

5.2 Cas de conservation du moment cinétique

Cette loi est particulièrement intéressante lorsque la somme des moments des forces \vec{f}_i par rapport à O s'annule. Cela correspond à $\sum_i \vec{OM} \wedge \vec{f}_i = \vec{OM} \wedge \sum_i \vec{f}_i = \vec{0}$. En pratique, cette situation n'arrive que dans deux cas :

- celui où $\sum_i \vec{f}_i = \vec{0}$ à tout instant. Le point M est alors isolé ou pseudo-isolé. Il est en mouvement rectiligne et uniforme ou immobile ;
- celui où $\sum_i \vec{f}_i \parallel \vec{OM}$ à tout instant. La droite d'action de la résultante des forces passe alors constamment par O . M est soumis à une **force centrale** de centre O . Ce type de force fait l'objet du chapitre *Mouvement dans un champ de force centrale. Champs newtoniens*.

5.3 Loi du moment cinétique par rapport à un axe fixe

La dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté fixe (Oz) est égale à la somme des moments des forces calculés par rapport à ce même axe :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i). \quad (19.6)$$

On démontre cette loi en remarquant que : $\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \frac{d(\vec{L}_O \cdot \vec{u}_z)}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{u}_z$.

En effet, l'axe (Oz) étant fixe, le vecteur \vec{u}_z est constant. On exprime alors $\frac{d\vec{L}_O}{dt}$ grâce à la relation (19.5) :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{u}_z = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i) \cdot \vec{u}_z = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i).$$

Remarque

La loi (19.6) est une loi scalaire qui ne fournit qu'une seule équation. Utilisée seule, elle ne permet de résoudre que les problèmes à un degré de liberté. En pratique, le mouvement du point M est presque obligatoirement circulaire. Pour les problèmes à deux degrés de liberté, elle doit être complétée par une autre équation mécanique indépendante comme la loi de l'énergie cinétique.

6 Loi du moment cinétique pour un solide en rotation

On s'intéresse au mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe orienté (Oz) fixe dans un référentiel galiléen \mathcal{R} . Son moment d'inertie par rapport à (Oz) est noté $J_{(Oz)}$. Son mouvement est caractérisé par sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Son moment cinétique par rapport à (Oz) vaut $L_{(Oz)} = J_{(Oz)}\dot{\theta}$. Il est soumis aux forces extérieures \vec{f}_i de moments $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$.

6.1 Loi scalaire du moment cinétique pour un solide

Dans un référentiel \mathcal{R} galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique du solide par rapport à son axe de rotation fixe (Oz) est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à ce même axe :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i). \quad (19.7)$$

Pour un solide en rotation autour de l'axe (Oz) , le moment d'inertie $J_{(Oz)}$ est constant, alors :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \frac{d(J_{(Oz)}\dot{\theta})}{dt} = J_{(Oz)}\ddot{\theta},$$

et on peut réécrire cette relation :

$$J_{(Oz)}\ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i).$$

On peut noter le parallèle complet entre cette équation, que l'on peut également écrire :

$$J_{(Oz)}\ddot{\theta} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i) \cdot \vec{u}_z,$$

et le principe fondamental de la dynamique écrit pour un solide en translation rectiligne sur l'axe (Ox) :

$$m\ddot{x} = \sum_i \vec{f}_i \cdot \vec{u}_x.$$

L'accélération linéaire \ddot{x} est remplacée par l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$, les forces projetées sur l'axe du mouvement par les moments des forces projetés sur l'axe de rotation et la masse inerte m par le moment d'inertie $J_{(Oz)}$. Cela permet de donner une interprétation physique du moment d'inertie du solide.

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à l'axe (Oz) est sa caractéristique intrinsèque qui mesure son aptitude à s'opposer aux variations de vitesse de rotation autour de cet axe.

6.2 Cas de conservation du moment cinétique

Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est conservé si la somme des moments des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle.

En effet, dans ce cas, la loi du moment cinétique appliquée au solide s'écrit :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = 0 \implies L_{(Oz)} = J_{(Oz)} \dot{\theta} = \text{constante.}$$

Le moment d'inertie $J_{(Oz)}$ étant une constante, la vitesse de rotation du solide l'est également.

Cas particulier d'un solide en équilibre Un solide en rotation est à l'équilibre lorsque sa vitesse angulaire reste nulle à tout instant. On obtient donc :

$$\dot{\theta} = 0 \implies L_{(Oz)} = 0 \implies \frac{dL_{(Oz)}}{dt} = 0.$$

La loi du moment cinétique s'écrit alors :

$$\sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) = 0.$$

C'est un cas particulier de la situation précédente pour laquelle non seulement la somme des moments des forces est nulle, mais la vitesse angulaire initiale également.

6.3 Couples

a) Couple de deux forces

Deux forces \vec{f}_1 et \vec{f}_2 opposées s'appliquant respectivement en A_1 et A_2 forment un couple de forces (figure 19.6). Leur résultante est nulle : $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$.

Ces forces sont de norme f identique et s'appliquent sur des droites d'action parallèles. La distance d entre ces droites s'appelle le bras de levier du couple et le moment du couple de force par rapport à l'axe orienté (Oz) est égal au produit de la force par le bras de levier :

$$|\mathcal{M}_{(Oz)}| = f d_1 + f d_2 = f d.$$

Par abus de langage, étant donné que la somme des deux forces est nulle et que seul le moment de ces forces est non nul, on désigne souvent par couple, le moment du couple par rapport à (Oz) et on le note Γ .

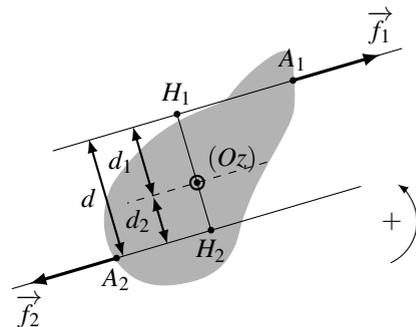


Figure 19.6 – Définition d'un couple de force.

Il faut remarquer que le moment du couple Γ ne dépend pas de la position de l'axe de rotation.

Par ailleurs, il est algébrique et on peut trouver son signe en cherchant le sens dans lequel il tend à faire tourner M autour de l'axe orienté (Oz) :

- si ce sens est direct, $\Gamma > 0$;
- si ce sens est indirect, $\Gamma < 0$.

Exemple

Sur le schéma de la figure 19.6, $\Gamma = -fd$.

b) Généralisation

On peut généraliser la notion de couple à tous les cas où la somme des forces est nulle et le moment des forces par rapport à un axe (Oz) n'est pas nul, sans se préoccuper de savoir s'il a fallu deux forces pour réaliser cette situation.

Exemple

La résultante des actions mécaniques qu'un moteur exerce sur un arbre en rotation est un couple.

Remarque

En lien avec le cours de SII, un couple de force est un torseur des actions mécaniques de forme couple.

c) Couple moteur et couple de freinage

On considère un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe (Oz) auquel on applique un couple de moment par rapport à (Oz) égal à Γ . La loi du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) appliquée au solide implique que :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = J_{(Oz)} \ddot{\theta} = \Gamma.$$

On suppose que le solide tourne dans le sens direct autour de (Oz) ce qui implique que $\dot{\theta} > 0$ et on distingue deux cas selon le signe de Γ :

- si $\Gamma > 0$, $\ddot{\theta} > 0$ et la vitesse angulaire du solide en rotation augmente. La rotation du solide est accélérée ;
- si $\Gamma < 0$, $\ddot{\theta} < 0$ et la vitesse angulaire du solide en rotation diminue. La rotation du solide est freinée.

On peut tenir le même raisonnement dans le cas où $\dot{\theta} < 0$, et au final :

- lorsque Γ est du même signe que $\dot{\theta}$, la vitesse de rotation du solide augmente en valeur absolue. Le couple est un **couple moteur** ;
- lorsque Γ est du signe opposé à $\dot{\theta}$, la vitesse de rotation du solide diminue en valeur absolue. Le couple est un **couple de freinage**.

7 Application aux dispositifs rotatifs

Un dispositif rotatif est un dispositif dans laquelle un solide indéformable appelé **rotor** est en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un solide immobile appelé **stator**. Dans cette

partie, on définit la liaison pivot qui permet de restreindre le mouvement relatif entre ces deux solides à un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. On montre également qu'**il est nécessaire que le stator impose un couple au rotor** lorsque l'on veut réaliser un moteur ou un frein.

7.1 Liaison pivot d'axe (Oz)

a) Définition

Une **liaison pivot** d'axe (Oz) restreint les possibilités de mouvement du rotor à une rotation d'axe (Oz) par rapport au stator.

Dans ce chapitre, on suppose que la liaison pivot est géométriquement idéale. Dans ce cas, elle assure un guidage parfait de la rotation autour de l'axe de liaison (Oz) et elle bloque toute translation le long de (Oz). La liaison pivot est alors entièrement définie par la direction et la position de l'axe (Oz) que l'on précise systématiquement.

Remarque

C'est la liaison la plus commune dans les systèmes mécaniques. Dans un simple vélo, on en compte plus d'une dizaine puisqu'elle est nécessaire pour relier au cadre les éléments suivant : roues (2), guidon (1), pédalier (1), manettes de frein (2), mâchoires de frein (2). Il y en a également pour relier les pédales au pédalier (2) et encore une bonne demi-douzaine si le vélo possède des dérailleurs.

b) Réalisation pratique d'une liaison pivot

Pour réaliser une liaison pivot d'axe (Oz), la solution technique la plus courante consiste à emboîter deux cylindres de même axe et à réaliser des buttés pour empêcher les cylindres de coulisser le long de leur axe commun (figure 19.7).

Remarque

Le contact entre les deux cylindres conduit à l'existence de frottements que l'on peut réduire fortement en utilisant des roulements à billes ou à aiguilles.

c) Action de liaison et liaison pivot idéale d'axe (Oz)

L'action de liaison résulte des forces exercées par le stator sur le rotor. Elle n'est pas déterminée *a priori*. Si l'on regarde de près les forces de contact au niveau des cylindres emboîtés (coupe (AB) de la figure 19.7), on constate que ces forces sont réparties tout au long de la surface de contact. Si l'on peut négliger les frottements, elles sont normales aux surfaces de contact et coupent l'axe de rotation (Oz). Dans ce cas, le moment par rapport à (Oz) de chacune de ces forces est nul et le moment par rapport à (Oz) de la liaison est égal à 0.

L'action de liaison d'une liaison pivot idéale d'axe (Oz) a un moment par rapport à l'axe (Oz) égal à 0 :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\text{liaison}) = 0.$$

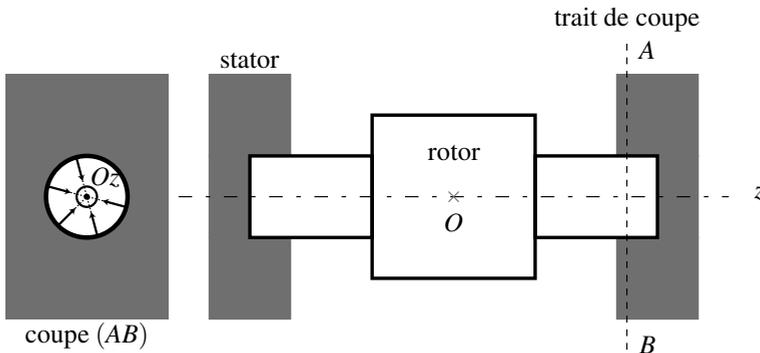


Figure 19.7 – Schéma de principe d'une liaison pivot.



Il faut bien comprendre que seul le moment de l'action de liaison est nul. Sa résultante ne l'est pas puisque c'est elle qui assure le guidage en rotation autour de l'axe (Oz).

Remarque

En pratique, malgré l'utilisation de roulements à bille ou à aiguille, il reste des forces de frottement qui produisent un couple résistant d'axe (Oz).

7.2 Notions sur les moteurs et les freins dans les dispositifs rotatifs (PTSI)

a) Cas du moteur

Un moteur est utilisé pour entraîner une autre pièce mécanique en rotation. Il exerce un couple moteur sur cette pièce et, d'après le principe des actions réciproques, cette dernière exerce un couple de freinage sur le rotor. Pour maintenir le rotor en rotation, il est donc nécessaire de compenser ce couple de freinage par un couple moteur. C'est le stator qui est chargé de produire ce couple.

b) Cas du frein

Un frein est utilisé pour freiner le rotor. Pour cela, il est indispensable de lui appliquer un couple de freinage. C'est le rôle joué dans ce cas par le stator.

Exemple

Lors du freinage d'un vélo, le rotor est la roue du vélo et le stator son cadre. Le freinage est assuré par des patins en caoutchouc qui viennent en appui sur la jante et produisent un couple de freinage sur le rotor par frottements solides.

Au final, lorsque l'on veut appliquer un couple sur le rotor, la présence du stator est indispensable pour deux raisons :

- la première, la plus évidente, est de créer un axe de rotation fixe ;
- la deuxième est de pouvoir appliquer un couple sur le rotor.

8 Pendule pesant

8.1 Position du problème et équation du mouvement

Un **pendule pesant** est un solide de masse m de forme quelconque mobile dans le champ de pesanteur terrestre autour d'un axe horizontal fixe ne passant pas par son centre de gravité G (figure 19.8).

On note (Oz) l'axe de rotation du solide, G son centre de gravité et $J_{(Oz)}$ son moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) . On repère la position du solide par l'angle θ que fait la droite (OG) avec la verticale descendante (Ox) . On suppose que la liaison entre le solide et le référentiel terrestre est une liaison pivot parfaite d'axe (Oz) . Le solide est soumis à :

- l'action exercée par la liaison pivot. On suppose cette liaison pivot idéale, ce qui implique que son moment par rapport à l'axe (Oz) est nul ;
- son poids vertical descendant qui s'applique au centre de gravité G . Son moment par rapport à (Oz) est égal en module au produit $mg \times L$ où $L = d \sin \theta$ est le bras de levier représenté sur la figure 19.8. Cette force tend à ramener le pendule vers sa position d'équilibre. Le signe de son moment par rapport à (Oz) est opposé à celui de $\sin \theta$. En effet, on voit sur la figure 19.8 que $\theta > 0$, $\sin \theta > 0$, et $\mathcal{M}_{(Oz)} < 0$. Au final :

$$\mathcal{M}_{(Oz)} = -mgd \sin \theta.$$

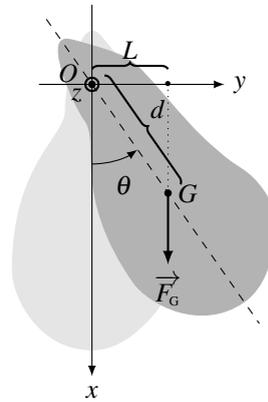


Figure 19.8 – Pendule pesant.

On applique au solide la loi du moment cinétique par rapport à l'axe orienté (Oz) fixe dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = -mgd \sin \theta. \quad (19.8)$$

Le moment cinétique de la barre est égal $L_{(Oz)} = J_{(Oz)} \dot{\theta}$ donc $\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = J_{(Oz)} \ddot{\theta}$. On injecte alors cette relation dans l'équation (19.8) pour obtenir :

$$J_{(Oz)} \ddot{\theta} = -mgd \sin \theta \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_{(Oz)}} \sin \theta = 0. \quad (19.9)$$

Cette équation est du type $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_{(Oz)}}}$. Il s'agit de la même équation que celle que l'on a obtenue lors de l'étude du pendule simple.

Les positions d'équilibre $\theta_{eq1} = 0$ et $\theta_{eq2} = \pi$ permettent au moment du poids par rapport à (Oz) d'être égal à 0. Dans ces positions, la somme des moments des forces qui s'appliquent au pendule est nulle. On remarque que dans ce cas, le centre de gravité est sur une droite

verticale partant du point d'attache O . En pratique, seule la position $\theta_{\text{eq}} = 0$ est réalisable car c'est la seule qui est stable.

Remarque

On met en évidence une méthode qui permet de repérer expérimentalement la position du centre de gravité d'un solide. Si l'on utilise un autre point d'attache, on trouve une autre droite verticale. Le centre de gravité est alors à l'intersection des deux droites et on peut déterminer la distance d .

8.2 Oscillations de faible amplitude

Lorsque les oscillations sont de faible amplitude au voisinage de la position d'équilibre $\theta_{\text{eq}} = 0$, $\sin \theta \simeq \theta$ et l'équation (19.9) peut être linéarisée :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_{(Oz)}}}.$$

On reconnaît une équation d'oscillateur harmonique dont les solutions sont des sinusoides de pulsation ω_0 :

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

θ_m et φ_0 sont des constantes d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales. Étant donné que le solide oscille autour d'une position d'équilibre stable, il est normal de trouver des oscillations harmoniques pour les petites oscillations autour de cette position. Ces oscillations présentent la propriété remarquable d'avoir une période indépendante de l'amplitude (isochronisme des petites oscillations). La mesure de cette période permet de déterminer la valeur de $J_{(Oz)}$, connaissant la position du centre de gravité, la masse du solide et la valeur de l'accélération de pesanteur.

8.3 Intégrale première du mouvement et étude qualitative

a) Obtention d'une intégrale première du mouvement

On peut établir une intégrale première du mouvement à partir de l'équation (19.9). Pour cela, on la multiplie par $\dot{\theta}$:

$$J_{(Oz)} \ddot{\theta} \dot{\theta} + mgd \sin \theta \dot{\theta} = J_{(Oz)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) - mgd \frac{d}{dt} (\cos \theta) = 0,$$

puis on l'intègre par rapport au temps :

$$\frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2 - mgd \cos \theta = \text{constante} = E_m.$$

La quantité $\frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2 - mgd \cos \theta = E_m$ est donc une intégrale première du mouvement homogène à une énergie. En effet, $J_{(Oz)}$ se mesure en $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ et $\dot{\theta}$ est homogène à l'inverse d'un temps donc $J_{(Oz)} \dot{\theta}^2$ se mesure en $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2} = \text{J}$.

Le terme $\frac{1}{2}J_{(Oz)}\dot{\theta}^2$ correspond à l'énergie cinétique de la barre en rotation autour de l'axe (Oz) . Le terme $-mgd \cos \theta$ est l'énergie potentielle de pesanteur du solide car $-d \cos \theta$ est l'altitude du centre de gravité G comptée à partir de O (voir figure 19.8). E_m est donc l'énergie mécanique du solide. C est une constante qui dépend des conditions initiales du mouvement.

b) Étude qualitative du mouvement

Pour réaliser une étude qualitative du mouvement, on utilise la démarche décrite dans le chapitre *Mouvement dans un puits de potentiel* et on l'adapte au cas d'une variable angulaire.

On trace l'énergie potentielle sans dimension $E_p^* = \frac{E_p}{mgd} = -\cos \theta$ en fonction de θ . E_p^* est obtenue à partir de l'énergie potentielle $E_p = -mgd \cos \theta$ en prenant l'énergie caractéristique $E_0 = mgd$ comme échelle d'énergie.

L'énergie potentielle est minimale lorsque θ est égal à 0 modulo 2π pour lesquels le centre de gravité G du pendule pesant est situé en dessous de O et à sa verticale. Ces minima correspondent à la position d'équilibre stable du pendule pesant. L'énergie potentielle est maximale lorsque θ est un multiple impair de π . Ces maxima correspondent à la position d'équilibre instable du pendule pour laquelle G est à la verticale de O et au dessus.

On trace la droite horizontale d'ordonnée $E_m^* = \frac{E_m}{mgd}$ qui doit être supérieure à E_p^* et doit donc se situer au dessus de la zone grisée.

Deux cas se présentent alors :

- si $-1 < E_m^* = E_{m1}^* < 1$, le pendule pesant est dans un état lié. Il n'a pas l'énergie mécanique suffisante pour sortir du puits de potentiel et on observe un mouvement pendulaire dont on peut déterminer l'amplitude graphiquement ;
- soit $E_m^* = E_{m2}^* > 1$, le pendule pesant est dans un état de diffusion avec une énergie suffisante pour sortir du puits de potentiel. Les mouvements sont alors des mouvements de révolution.

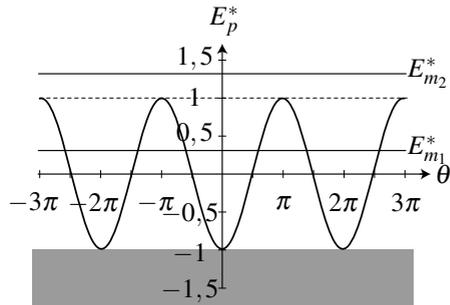


Figure 19.9 – Énergie potentielle d'un pendule pesant. En pointillé, l'énergie mécanique minimale nécessaire pour obtenir un mouvement de révolution.

8.4 Portrait de phase

On peut utiliser l'intégrale première du mouvement pour expliciter la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de l'angle θ et de l'énergie mécanique E_m . On trouve :

$$\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} = \pm \sqrt{2 \left(\frac{E_m}{mgd} + \cos \theta \right)}$$

On trace alors $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ en fonction de θ pour différentes valeurs de $\frac{E_m}{mgd}$ pour obtenir le portrait de phase du pendule pesant dans le plan sans dimension $\left(\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)$. On rappelle que l'énergie cinétique étant positive, l'énergie mécanique ne peut jamais devenir inférieure au minimum d'énergie potentielle, à savoir $-mgd$, ce qui implique que $\frac{E_m}{mgd} > -1$. Ce diagramme de phase est représenté sur la figure 19.10.

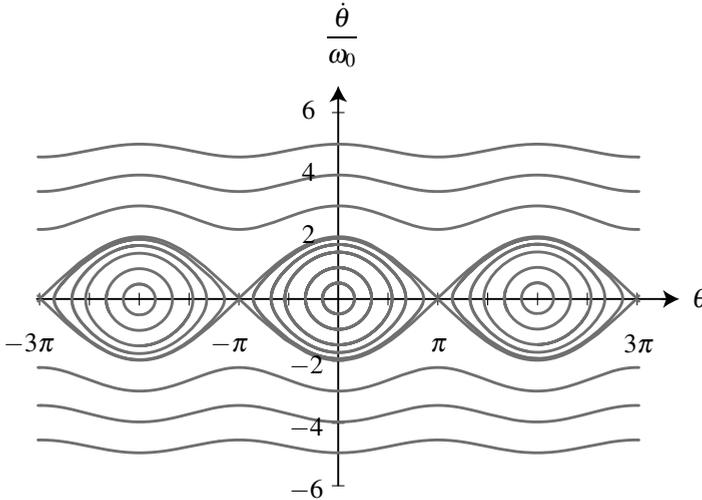


Figure 19.10 – Portrait de phase d'un pendule pesant.

Les mouvements de faible amplitude sont pendulaires : le pendule réalise un mouvement de va et vient entre deux positions extrêmes $\pm\theta_m$. En ces positions extrêmes, l'énergie cinétique s'annule ce qui implique que :

$$E_p(\pm\theta_m) = E_m \quad \text{où } \theta_m \in [0, \pi[.$$

L'angle θ oscille périodiquement dans l'intervalle $]-\theta_m, \theta_m[$. Le portrait de phase est similaire à celui d'un point matériel dans un puits de potentiel quelconque :

- lorsque l'amplitude est faible, les trajectoires de phase sont elliptiques (et même circulaires avec des échelles des abscisses et des ordonnées adaptées), ce qui est la signature des oscillateurs harmoniques ;
- lorsque l'amplitude devient importante, la trajectoire de phase se déforme mais reste fermée.

Pour des énergies plus importantes, le mouvement est révolutif : le pendule effectue une succession de tours complets toujours dans le même sens. L'angle θ n'est plus borné (si l'on néglige les frottements) et varie de 2π à chaque tour. La vitesse est maximale lorsque le centre de gravité du pendule atteint son point le plus bas et minimale au point le plus haut.

La transition entre ces deux types de mouvement a lieu lorsque l'énergie mécanique devient supérieure à l'énergie potentielle maximale, ce qui permet au pendule de s'échapper

du puits de potentiel et d’être dans un état de diffusion. On en déduit que :

$$E_{m,transition} = mgd.$$

8.5 Résolution numérique

On peut également résoudre numériquement l’équation (19.9) et trouver l’évolution temporelle de l’angle θ . Pour cela, il faut choisir une position et une vitesse angulaire initiale à procurer au pendule. La figure 19.11 représente les solutions de l’équation (19.9) pour les conditions initiales $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$, où la vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0$ est un paramètre ajustable. Sur cette figure, $\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}$ prend les valeurs : 0, 1 ; 0,5 ; 1,0 ; 1,5 ; 1,75 ; 1,9 ; 1,99 ; 2,0 et 2,01.

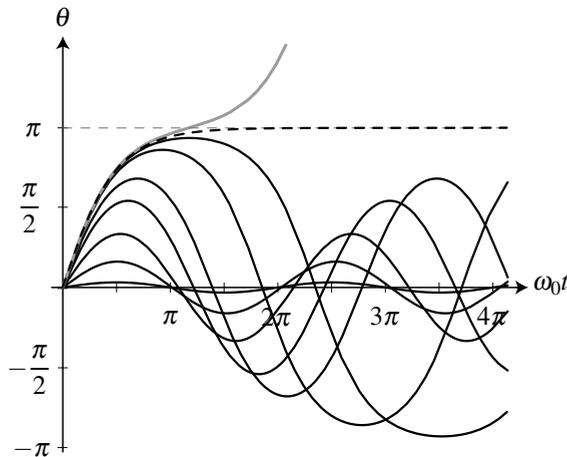


Figure 19.11 – Évolution temporelle de l’angle θ : en trait continu noir, les mouvements sont pendulaires ; en trait continu gris, il est révolatif. Les pointillés correspondent à la transition entre ces deux régimes.

Le mouvement révolatif correspond à une fonction $\theta(t)$ monotone croissante (en trait continu gris obtenue pour $\dot{\theta}_0 = 2,01\omega_0$), tandis que les mouvements pendulaires correspondent à des fonctions $\theta(t)$ périodiques (en trait continu noir obtenues pour $\dot{\theta}_0$ compris entre $0,1\omega_0$ et $1,99\omega_0$). La courbe obtenue pour $\dot{\theta}_0 = 2,0\omega_0$ est la courbe en pointillés qui fait la transition entre ces deux comportements très différents. Les mouvements pendulaires ayant lieu dans un puits de potentiel qui n’est pas harmonique, seules les oscillations de faible amplitude sont sinusoïdales et isochrones.

9 Énergie d’un solide en rotation autour d’un axe fixe

On reprend les mêmes notations que dans le paragraphe 6 : on considère un solide en rotation autour d’un axe orienté fixe noté (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par rapport à un référentiel \mathcal{R} galiléen. Dans ce paragraphe, on établit l’expression de l’énergie cinétique du solide et la loi de l’énergie cinétique pour un solide en rotation.

9.1 Énergie cinétique d'un solide en rotation

On modélise le solide par un ensemble de points matériels M_i de masse m_i repérés en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) : $M_i(r_i, \theta_i, z_i)$. On a vu au paragraphe 3.2 que le moment d'inertie du solide par rapport à (Oz) vaut alors $J_{(Oz)} = \sum_i m_i r_i^2$. Par ailleurs, on a vu dans le chapitre *Cinématique du solide* qu'un point M_i quelconque du solide est en mouvement circulaire de rayon r_i à la vitesse angulaire commune $\dot{\theta}$. Sa vitesse est donc $\vec{v}_i = r_i \dot{\theta} \vec{u}_{\theta_i}$ et son énergie cinétique $E_c(M_i) = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \dot{\theta}^2$.

L'énergie cinétique du solide est obtenue par sommation de l'énergie cinétique de chacun des points qui le constituent :

$$E_c = \sum_i E_c(M_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \dot{\theta}^2,$$

où on reconnaît l'expression du moment d'inertie du solide : $J_{(Oz)} = \sum_i m_i r_i^2$.

Un solide de moment d'inertie $J_{(Oz)}$ en rotation autour d'un axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ possède l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2.$$

C'est bien l'énergie cinétique que l'on a trouvée au paragraphe 8 lors de la détermination de l'intégrale première du mouvement. Il s'agissait alors d'un cas particulier de la loi de l'énergie cinétique pour un solide en rotation que l'on va établir dans le paragraphe suivant.

Remarque

On peut mémoriser l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour de l'axe (Oz) à partir de celle, bien connue, d'un solide en translation rectiligne sur l'axe (Ox) : $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$. Il suffit de remplacer la masse par le moment d'inertie et la vitesse linéaire par la vitesse angulaire.

9.2 Puissance d'une force appliquée sur un solide en rotation

On considère une force \vec{f}_i qui s'applique au point M_i d'un solide en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. La puissance de la force \vec{f}_i est égale au produit scalaire de la force \vec{f}_i par la vitesse $\vec{v}_{M_i} = r_i \dot{\theta} \vec{u}_{\theta_i}$ du point M_i sur laquelle elle s'applique d'où :

$$\mathcal{P}(\vec{f}_i) = \vec{f}_i \cdot \vec{v}_{M_i} = \vec{f}_i \cdot r_i \dot{\theta} \vec{u}_{\theta_i} = f_{i\theta} r_i \dot{\theta} = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) \dot{\theta}.$$

En effet, d'après l'équation 19.4, $r_i f_{i\theta} = \mathcal{M}_{(Oz)}$.

La puissance de la force \vec{f}_i appliquée en un point M_i d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (Oz), est égale au produit du moment par rapport à (Oz) de cette force par la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de rotation du solide autour de cet axe :

$$\mathcal{P}(\vec{f}_i) = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) \dot{\theta}.$$

9.3 Loi de l'énergie cinétique pour un solide indéformable

Dans le référentiel \mathcal{R} galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe, est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures \vec{f}_i qu'on lui applique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i).$$

Pour établir cette loi, on dérive l'expression de l'énergie cinétique et on trouve :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2 \right) = J_{(Oz)} \ddot{\theta} \dot{\theta}. \quad (19.10)$$

Or, la loi du moment cinétique pour un solide en rotation autour de l'axe (Oz) fixe implique : $J_{(Oz)} \ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$ où $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$ est le moment par rapport à (Oz) de la force extérieure \vec{f}_i appliquée au solide. En insérant cette relation dans l'équation (19.10), on obtient :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) \dot{\theta} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i),$$

où $\mathcal{P}(\vec{f}_i) = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) \dot{\theta}$ est la puissance de la force \vec{f}_i .

La démonstration de la loi de l'énergie cinétique montre qu'elle est équivalente à la loi du moment cinétique autour d'un axe fixe.

Pour étudier un solide en rotation autour d'un axe fixe, les lois de l'énergie cinétique ou du moment cinétique sont équivalentes et donnent des équations identiques.

Par ailleurs, la définition de la puissance confirme la cohérence des notions de couples moteurs et de freinage vues au paragraphe 6.3. En effet, on retrouve que :

- lorsque $\mathcal{M}_{(Oz)}$ est du même signe que $\dot{\theta}$, la puissance de la force est positive, le couple est moteur ;
- lorsque $\mathcal{M}_{(Oz)}$ est du signe opposé à $\dot{\theta}$, la puissance de la force est négative, le couple est résistant.

Remarque

On peut mémoriser l'expression de la puissance d'une force \vec{f} s'exerçant sur un solide en rotation autour de l'axe (Oz) à partir de celle, bien connue, qui s'applique sur un solide en translation rectiligne sur l'axe (Ox) :

$$\mathcal{P} = f_x \dot{x}.$$

Il suffit de remplacer la projection f_x de la force sur l'axe du mouvement (Ox) par la projection $\mathcal{M}_{(Oz)}$ du moment sur l'axe de rotation (Oz) et la vitesse linéaire \dot{x} par la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ pour obtenir :

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_{(Oz)} \dot{\theta}.$$

SYNTHÈSE*SAVOIRS*

- moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point ou à un axe
- moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe
- moment d'inertie et lien qualitatif à la répartition des masses
- moment cinétique d'un solide par rapport à un axe orienté
- notion de bras de levier
- définition d'un couple
- définition d'une liaison pivot
- loi du moment cinétique en un point fixe
- loi scalaire du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe
- pendule pesant
- énergie cinétique d'un solide en rotation

SAVOIR-FAIRE

- relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement
- maîtriser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire
- utiliser le bras de levier pour calculer le moment d'une force
- justifier le moment que peut fournir une liaison pivot
- reconnaître les cas de conservation du moment cinétique
- étudier le mouvement d'un pendule pesant. Lire et interpréter son portrait de phase
- établir l'équivalence entre la loi de l'énergie cinétique et la loi scalaire du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

MOTS-CLÉS

- rotation.
- moment d'une force.
- pendule pesant.
- moment cinétique.
- moment d'inertie.